1. : Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes sur un intervalle I:

   (a) $I = \mathbb{R}$; $y' + y = f(x)$ où $f(x)$ est successivement égal à

   $$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\alpha}) & : & e^x \quad ; \boldsymbol{\beta}) : e^{-x} \quad ; \boldsymbol{\gamma}) : \operatorname{ch} x \quad ; \boldsymbol{\delta}) : \left(x^2+1\right) e^x \\ \boldsymbol{\varepsilon}) & : & x\cos x \quad ; \boldsymbol{\phi}) : x \sin x \quad \text{(passer en complexes)} \end{array}$$

   (b) $xy' + y = x^2 - x - 1$ sur $I =]0, +\infty[$, puis $I = [0, +\infty[$.

   (c) $(\sin x) y' - (\cos x) y = f(x)$ pour $f(x) = \sin 2x$ puis $f(x) = \sin x$ (sur $I =]0, \pi[$ puis $I = [0, \pi[$)

2. : Tracer des courbes solutions des équations différentielles suivantes. On déterminera pour chacune les points singuliers c'est-à-dire les points (x_0, y_0) pour lesquels il n'existe pas une unique solution f de l'équation vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

   (a) $xy' = y$

   (b) $xy' + y = 0$

   (c) $(\sin x) y' = (\cos x) y$.

3. : Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}$ l'équation

   $$|x| y' + y = \cos x$$

   On pourra utiliser la fonction Si appelée *sinus intégral* définie par $\operatorname{Si}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

   Réponse : sur $\mathbb{R}$, il y a une solution unique définie par $y(x) = \cos x + x \operatorname{Si}(x)$ pour $x \leqslant 0$ et $y(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x > 0$.

4. : Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation du deuxième ordre $xy'' + (1-x) y' = 1$ (IVP 90).

5. <u>Equations de Bernoulli</u>.

   (a) Déterminer les solutions jamais nulles de $xy' - y + 3x^2y^2 = 0$ (diviser par y^2).

   (b) Généraliser la méthode précédente aux équations du type :

   $$a(x) y' + b(x) y + c(x) y^\alpha = 0 \text{ avec } \alpha \neq 1$$

6. * : L'équation logistique (bac S 2003).

   En 1838, le mathématicien belge Pierre-François Verhulst a proposé, pour modéliser l'accroissement d'une population, l'équation différentielle : $N' = aN\left(1 - \dfrac{N}{N_{\max}}\right)$, qu'il a baptisée "équation logistique". $N(t)$ représente le nombre d'éléments de la population à l'instant t , N étant supposée de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; cette équation s'interprète de la façon suivante : tant que N est petit devant $N_{\max}$, le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus ($N' \approx aN$), ceci étant pondéré par le terme dans la parenthèse, qui tend vers 0 quand N tend vers $N_{\max}$; $N_{\max}$ représente le maximum de population.

   (a) Déterminer les solutions jamais nulles sur $\mathbb{R}$ de cette équation, remarquant qu'elle est de Bernoulli (cf. exercice précédent).

   (b) Notant $N_0 = \dfrac{N_{\max}}{k}$ le nombre d'individus à l'instant $t = 0$, montrer que

   $$N(t) = \frac{N_{\max}}{1 + (k-1) e^{-at}}$$

   (c) Montrer que $N'' = a\left(1 - 2\dfrac{N}{N_{\max}}\right) N'$.

   (d) On suppose $0 < N_0 < \dfrac{N_{\max}}{2}$; dresser un tableau indiquant le signe de N'' et de N', les variations de N' et N et les limites aux bornes ; tracer l'allure de la courbe de la fonction N.

7. * : Équations de Riccati :

$$(\mathbf{E}) \quad : \quad a(x)\,y' + b(x)\,y + c(x)\,y^2 + d(x) = 0$$

   (a) Montrer que si y_0 est une solution particulière de $(\mathbf{E})$, le changement de fonction inconnue $z = y - y_0$ aboutit à une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$. Quel changement faut-il alors effectuer pour obtenir une équation linéaire?

   (b) On prend $y_0 = \tan x$; trouver une équation différentielle $(\mathbf{E})$ ne faisant pas intervenir la fonction tan dont y_0 est solution.

   (c) Résoudre $(\mathbf{E})$ en utilisant (a).
   On trouve $y = \tan x + \dfrac{1}{\cos^2 x\,(\lambda - \tan x)} = \dfrac{1 + \lambda \tan x}{\lambda - \tan x}$; pour quelle valeur de λ obtient-on y_0 ?

   (d) Résoudre $(\mathbf{E})$ en posant $z = \arctan y$ et comparer les deux résultats.

   (e) Autre exemple : $x^3y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0$ (solution particulière $-x^2$).

8. : Soit f la solution de $(\mathbf{E})$, définie au voisinage de zéro, vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$, où

$$(\mathbf{E}) : 2(x-1)\,y' + y = \sin 2x + x^2$$

   (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une telle solution.

   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de zéro, et donner son développement limité à l'ordre 4 en 0.
   Rep : $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{7x^3}{12} - \dfrac{11x^4}{32} + o\left(x^4\right)$.

9. : Montrer que si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x)\,f(y) \Leftrightarrow f = 0 \text{ ou } \exists a \in \mathbb{C} \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{ax}$$

10. * : Soit $f_m : x \mapsto (m-1)\,x^3 + x^2 - m$. On appelle $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative.

   (a) Déterminer les points communs à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$.

   (b) Étudier f_m.

   (c) Déterminer l'équation différentielle dont les f_m sont les solutions.

   (d) Déterminer le lieu $\mathcal{H}$ des points à tangente horizontale des diverses courbes $\mathcal{C}_m$, ainsi que le lieu $\mathcal{I}$ des points d'inflexion.

   (e) Tracer dans un même repère $\mathcal{C}_0$,$\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$,$\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$.

11. : Intégrer les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants suivantes :

   (a) $y'' - 3y' + 2y = x^2$

   (b) $x'' - \omega_0^2 x = e^{\omega t}$ avec $\omega_0 > 0$ et $\omega > 0$.

   (c) $y'' - 2y' + y = \left(x^2 + 1\right) e^x$

   (d) $y'' + y = \cos^3 x$

12. : Résoudre l'équation différentielle $y''' = y$ (dans $\mathbb{R}$).

   (a) En trouvant une solution jamais nulle y_0 de cette équation et en posant $y = zy_0$.

   (b) En supposant connu le théorème suivant :
   la solution générale complexe de l'équation $y''' + ay'' + by' + cy = 0$ est $\alpha e^{k_2 x} + \beta e^{k_2 x} + \gamma e^{k_3 x}$ où k_1, k_2, k_3 sont les 3 racines de l'équation $k^3 + ak^2 + bk + c = 0$, dans le cas où elles sont distinctes.
   REP : $\lambda e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(\mu \cos \dfrac{\sqrt{3}x}{2} + \nu \sin \dfrac{\sqrt{3}x}{2} \right)$.

   (c) Résoudre de même $y''' - 3y'' + 3y' - y = \cos x$.

13. : Équations d'Euler :

$$(\mathbf{E}) : x^2y'' + axy' + by = c(x) \ \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$

   On pose $x = \varepsilon e^t$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $y(x) = z(t)$.

(a) Montrer que l'équation différentielle en z, transformée de $(\mathbf{E})$ par ce changement de variable est à coefficients constants.

(b) Résoudre par exemple $x^2y'' - 5xy' + 9y = x + 1$.

14. : Suppression du terme en y'
Soit (E) : $y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire du deuxième ordre homogène à coefficients non forcément constants de classe C^1 sur l'intervalle I.

    (a) Écrire l'équation (E') transformée de (E) en posant $y = uz$.

    (b) Déterminer une équation différentielle simple que doit vérifier la fonction u de sorte que (E') ne contienne plus de terme en z', et résoudre cette équation en u.

    (c) Montrer que (E') peut se mettre sous la forme : $z'' = cz$, et exprimer la fonction c en fonction de a et b.
    Réponse : $4c = a^2 - 4b + 2a'$

    (d) Déterminer u et c quand a et b sont constantes.

15. : Méthode de variation des constantes pour une équation du deuxième ordre.

    Soit (E) l'équation linéaire $ay'' + by' + cy = d$ à coefficients non supposés constants (a ne s'annulant pas sur I) ; on suppose avoir trouvé deux fonctions y_1 et y_2 telles que les solutions de l'équation sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$ s'écrivent sous la forme $\alpha y_1 + \beta y_2$.

    La méthode de variation des constantes consiste à chercher les solutions de (E) sous la forme $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, avec α et β fonctions de classe C^1 sur I, **avec la condition supplémentaire** : $y' = \alpha y_1' + \beta y_2'$

    (autrement dit : $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$).

    (a) Montrer qu'alors, $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de (E) ssi $\begin{cases} \alpha' y_1 + \beta' y_2 = 0 \\ \alpha' y_1' + \beta' y_2' = \dfrac{d}{a} \end{cases}$.

    (b) En déduire que $S_{(E)} = \left\{ \alpha y_1 + \beta y_2 \ / \ \alpha' = -\dfrac{d}{a} \dfrac{y_2}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}, \beta' = \dfrac{d}{a} \dfrac{y_1}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \right\}$

    (c) Appliquer cette méthode à la résolution de $y'' + y = \tan x$.

16. * :

    (a) Déterminer toutes les applications $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(-x)$.

    (b) En déduire toutes les applications $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(a - x)$ où a est un réel fixé.

17. * : Déterminer toutes les applications $f \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ telles que $\forall x > 0 \quad f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (cf. 13)).